Aufgabe 1 (21 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3}$

---

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x^2} \overset{(?)}{=} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{-2x} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3} \overset{(?)}{=} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\cos 5x - 5\cos x}{3x^2} \overset{(?)}{=} \boxed{\tfrac{0}{0}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-25\sin 5x + 5\sin x}{6x} \overset{(?)}{=} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-125\cos 5x + 5\cos x}{6} = \dfrac{-125+5}{6} =$

$= \dfrac{-120}{6} = -20$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3} = \dfrac{1-5}{\frac{\pi^3}{8}} = -\dfrac{4\cdot 8}{\pi^3} = -\dfrac{32}{\pi^3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to \infty} (\sin 5x - 5\sin x)\cdot \dfrac{1}{x^3} = \boxed{\text{beschränkt}\cdot 0} = 0$

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Zeigen Sie: Für die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}(n+2x)\,\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Lösung mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang:
$n = 0$: $2^{-1} \cdot 2x\,\mathrm{e}^{2x} = x\,\mathrm{e}^{2x} = f(x)$
oder
$n = 1$: $f'(x) = \mathrm{e}^{2x} + x \cdot 2\,\mathrm{e}^{2x} = 2^0 \cdot (1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$
Induktionsschritt: Aus $f^{(n)}(x) = 2^{n-1}(n+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$ ergibt sich durch Ableiten

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) \;=\; \left(f^{(n)}\right)'(x) &= 2^{n-1} \cdot \left[2\,\mathrm{e}^{2x} + (n+2x) \cdot 2\,\mathrm{e}^{2x}\right] \\ &= 2^{n-1} \cdot [2 + 2n + 4x]\,\mathrm{e}^{2x} \\ &= 2^{n} \cdot [(n+1) + 2x]\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Lösung mit Leibniz-Formel:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x\,\mathrm{e}^{2x}\right) = x \cdot \frac{d^n}{dx^n}\,\mathrm{e}^{2x} + \binom{n}{1} 1 \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,\mathrm{e}^{2x} = x \cdot 2^n\,\mathrm{e}^{2x} + n \cdot 2^{n-1}\,\mathrm{e}^{2x} = 2^{n-1} \cdot (n+2x)\mathrm{e}^{2x}$$

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 + 1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

a) Geben Sie den (maximalen) Definitionsbereich und alle Nullstellen von f an.

b) Ist f symmetrisch?

c) Wie verhält sich $f(x)$ für $x \to \pm\infty$?

d) Geben Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ an.

e) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f sowie die zugehörigen Funktionswerte; untersuchen Sie, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

f) Auf welchen Teilintervallen des Definitionsbereichs ist f monoton wachsend, wo monoton fallend?

g) Besitzt f globale Extremwerte? Wenn ja, an welchen Stellen?

h) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Graphen von f. Sie können dazu den Wert $\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.606531$ verwenden.

---

a) $D(f) = \mathbb{R}$. Wegen $x^2 + 1 > 0$ und $\mathrm{e}^{-x^2/2} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ hat f keine Nullstellen.

b) f ist gerade: $f(-x) = ((-x)^2 + 1)\,\mathrm{e}^{-(-x)^2/2} = f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{e^{x^2/2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^{x^2/2}\cdot x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^{x^2/2}} = 0$

d) $f'(x) = (x - x^3)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$, $\quad f''(x) = (1 - 4x^2 + x^4)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$

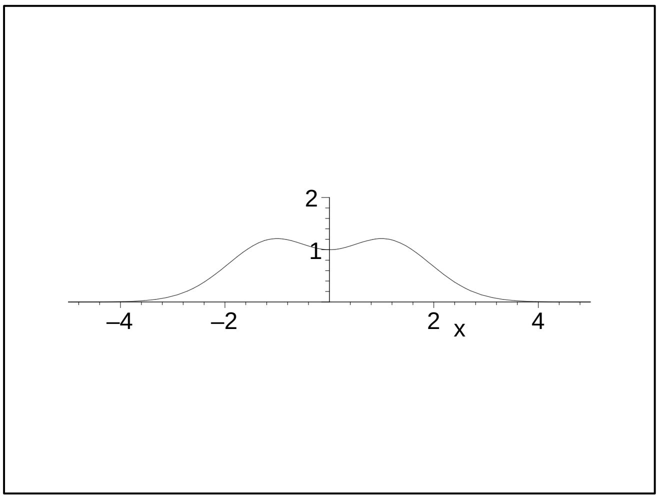
e) $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = \pm 1$
$f''(0) = 1 > 0$, also lokales Minimum in 0, mit $f(0) = 1$
$f''(\pm 1) = -2\,\mathrm{e}^{-1/2} < 0$, also lokale Maxima in ± 1, mit $f(\pm 1) = 2\,\mathrm{e}^{-1/2}$

f) Wegen $f'(x) = x(1 - x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ gilt:
monoton wachsend: $f'(x) \geq 0$ auf $(-\infty, -1]$ und $[0, 1]$
monoton fallend: $f'(x) \leq 0$ auf $[-1, 0]$ und $[1, \infty)$

g) Wegen $f(x) > 0$ für alle x und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ gilt in einem globalen Maximum $f'(x) = 0$. Also liegen in ± 1 globale Maxima vor.

Wegen $f(x) > 0$ für alle x und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ müsste in einem globalen Minimum $f(x) = 0$ gelten. Ein solches x gibt es jedoch nicht.

h)



Aufgabe 4 (25 Punkte)
Gegeben ist das Polynom $p(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + a$ mit einem reellen Parameter a.

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen des Polynoms und berechnen Sie mit dem Horner-Schema die zugehörigen Funktionswerte.

b) Für welche beiden Werte von a hat p eine doppelte Nullstelle? Zerlegen Sie $p(x)$ für einen dieser Werte in Linearfaktoren.

---

a) Für die Ableitung gilt

$$p'(x) \;=\; 12x^2 - 18x - 12 \;=\; 6 \cdot (2x^2 - 3x - 2)$$

Ihre Nullstellen sind

$$x_{1,2} \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \;=\; \frac{3 \pm 5}{4} \;=\; \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Berechnung der Funktionswerte bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$ mit Horner:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -9 & -12 & a \\ 2 & & 8 & -2 & -28 \\ \hline & 4 & -1 & -14 & \underline{a-28} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 4 & -9 & -12 & a \\ -\frac{1}{2} & & -2 & \frac{11}{2} & \frac{13}{4} \\ \hline & 4 & -11 & -\frac{13}{2} & \underline{a+\frac{13}{4}} \end{array}$$

Die Funktionswerte sind demnach

$$p(2) = a - 28 \qquad \text{und} \qquad p(-\frac{1}{2}) = a + \frac{13}{4}$$

b) Eine doppelte Nullstelle von $p(x)$ ist auch eine Nullstelle von $p'(x)$. In Frage kommen also nur $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist x_1 genau für $a = 28$ eine Nullstelle, x_2 genau für $a = -\frac{13}{4}$. Für diese beiden Werte kann die jeweilige Nullstelle nochmals abgespalten werden:

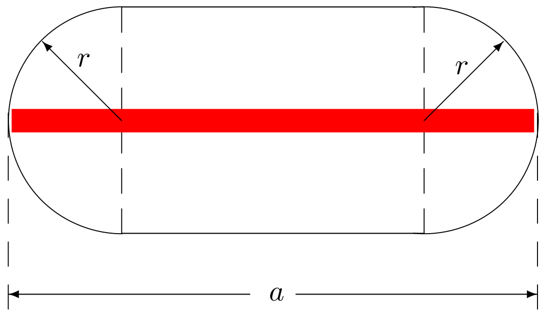
$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & -1 & -14 \\ 2 & & 8 & 14 \\ \hline & 4 & 7 & \underline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 4 & -11 & -\frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} & & -2 & \frac{13}{2} \\ \hline & 4 & -13 & \underline{0} \end{array}$$

Genau für $a = a_1 = 28$ und $a = a_2 = -\frac{13}{4}$ hat $p(x)$ also eine doppelte Nullstelle. Die Zerlegungen in Linearfaktoren sind

$$p(x) = (x-2)^2 \cdot (4x+7) \qquad \text{und} \qquad p(x) = (x + \frac{1}{2})^2 \cdot (4x - 13)$$

Aufgabe 5 (27 Punkte)

Ein schmales Hindernis der Länge $a > 0$ soll mit einem Fahrzeug umrundet werden, wobei die Fahrzeugabmessungen und die Breite des Hindernisses vernachlässigt werden können. Der Fahrer wählt hierzu eine Bahn mit halbkreisförmigen Kehren vom Radius $r > 0$, zwischen welchen er geradlinig fährt.



Das Fahrzeug soll mit (betragsmäßig) konstanter Geschwindigkeit v fahren. Diese wird so gewählt, dass das Fahrzeug gerade noch nicht aus der Kurve fliegt. Hieraus ergibt sich $v = b \cdot \sqrt{r}$ mit einem festen Faktor $b > 0$.

a) Zeigen Sie, dass das Fahrzeug für eine Runde die Zeit

$$t(r) = \frac{1}{b} \cdot \left[2(\pi - 2) \cdot r^{1/2} + 2a \cdot r^{-1/2}\right]$$

benötigt. Für welche r ist diese Formel gültig? Wie verhält sich $t(r)$ für $r \to 0$?

b) Bei welchem (zulässigen) Kehrenradius wird die kürzeste Rundenzeit erzielt? Welche spezielle Form hat die Bahn in diesem Falle?

---

a) Die Länge eines geradlinigen Abschnittes der Bahn ist $s_1 = a - 2 \cdot r$. Die beiden Kehren ergeben zusammen einen vollen Kreis. Ihre Gesamtlänge ist daher $s_2 = 2\pi \cdot r$. Für den in einer Runde zurückgelegten Weg ergibt sich

$$s = 2 \cdot s_1 + s_2 = 2 \cdot (a - 2r) + 2\pi \cdot r = 2(\pi - 2) \cdot r + 2 \cdot a$$

Die Zeit für eine Runde ist

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2(\pi - 2) \cdot r + 2 \cdot a}{b \cdot \sqrt{r}} = \frac{1}{b} \cdot \left[2(\pi - 2) \cdot r^{\frac{1}{2}} + 2a \cdot r^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Der Kehrenradius r darf dabei maximal so groß sein, dass die geradlinigen Abschnitte gerade verschwinden, also $0 < r \leq \frac{a}{2}$. Für $r \to 0$ strebt t gegen $+\infty$.

b) Es ist günstig, den konstanten Faktor $b > 0$ mit in die Zielfunktion $f(r)$ zu stecken:

$$f(r) := b \cdot t = 2(\pi - 2) \cdot r^{\frac{1}{2}} + 2a \cdot r^{-\frac{1}{2}} \qquad 0 < r \leq \frac{a}{2}$$

Für die stationären Stellen dieser Zielfunktion gilt

$$f'(r) = (\pi - 2) \cdot r^{-\frac{1}{2}} - a \cdot r^{-\frac{3}{2}} = r^{-\frac{3}{2}} \cdot [(\pi - 2) \cdot r - a] \overset{!}{=} 0$$

Es gibt genau eine Lösung dieser Gleichung, nämlich $r_1 = \dfrac{a}{\pi - 2}$

Wegen $\pi - 2 < 2$ ist jedoch $r_1 > \frac{a}{2}$. Diese Lösung liegt daher nicht im zulässigen Bereich. Das Extremum kann also nur am Rand liegen, das heißt bei $r = \frac{a}{2}$. Die Bahn ist dann ein Kreis.