HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART | STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSLEISTUNG IM WINTER–SEMESTER 2007/08 FÜR DIE BACHELORVORPRÜFUNG

FACH :	Analysis A	NAME :	
DATUM :	15.01.2008	SEMESTER :	M 1
ZEIT :	10.30 – 12.30		
PRÜFER :	Prof. Dr. Erben / Prof. Dr. Fischer		

HILFSMITTEL : Skript mit eigenen Unterlagen, zwei Bücher

ANLAGEN : keine

Die angegebenen Punktzahlen (Summe 120) dienen zu Ihrer Orientierung; die endgültige Wertung kann davon noch abweichen.

Ihre Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Gang der Rechnung nachvollziehbar ist.

Aufgabe 1 (21 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 5x - 5\sin x}{x^3}$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Zeigen Sie: Für die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}(n+2x)\,\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

a) Geben Sie den (maximalen) Definitionsbereich und alle Nullstellen von f an.

b) Ist f symmetrisch?

c) Wie verhält sich $f(x)$ für $x \to \pm\infty$?

d) Geben Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ an.

e) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f sowie die zugehörigen Funktionswerte; untersuchen Sie, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

f) Auf welchen Teilintervallen des Definitionsbereichs ist f monoton wachsend, wo monoton fallend?

g) Besitzt f globale Extremwerte? Wenn ja, an welchen Stellen?

h) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Graphen von f. Sie können dazu den Wert $\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.606531$ verwenden.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

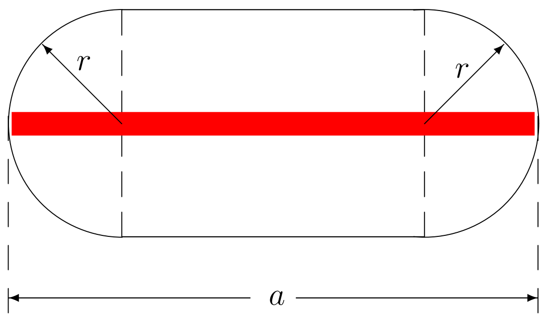
Gegeben ist das Polynom $p(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + a$ mit einem reellen Parameter a.

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen des Polynoms und berechnen Sie mit dem Horner-Schema die zugehörigen Funktionswerte.

b) Für welche beiden Werte von a hat p eine doppelte Nullstelle? Zerlegen Sie $p(x)$ für einen dieser Werte in Linearfaktoren.

Aufgabe 5 (27 Punkte)

Ein schmales Hindernis der Länge $a > 0$ soll mit einem Fahrzeug umrundet werden, wobei die Fahrzeugabmessungen und die Breite des Hindernisses vernachlässigt werden können. Der Fahrer wählt hierzu eine Bahn mit halbkreisförmigen Kehren vom Radius $r > 0$, zwischen welchen er geradlinig fährt.



Das Fahrzeug soll mit (betragsmäßig) konstanter Geschwindigkeit v fahren. Diese wird so gewählt, dass das Fahrzeug gerade noch nicht aus der Kurve fliegt. Hieraus ergibt sich $v = b \cdot \sqrt{r}$ mit einem festen Faktor $b > 0$.

a) Zeigen Sie, dass das Fahrzeug für eine Runde die Zeit

$$t(r) = \frac{1}{b} \cdot \left[2(\pi - 2) \cdot r^{1/2} + 2a \cdot r^{-1/2} \right]$$

benötigt. Für welche r ist diese Formel gültig? Wie verhält sich $t(r)$ für $r \to 0$?

b) Bei welchem (zulässigen) Kehrenradius wird die kürzeste Rundenzeit erzielt? Welche spezielle Form hat die Bahn in diesem Falle?